**Эконометрика**

Оглавление

[**Основные понятия** 2](#_Toc99364686)

[**Модель скользящего среднего** 4](#_Toc99364687)

[**Модель авторегрессии (порядка p)** 7](#_Toc99364688)

[**Оценивание параметров модели с помощью метода максимального правдоподобия** 13](#_Toc99364689)

[**Модель авторегрессии и скользящего среднего** 16](#_Toc99364690)

[**Прогнозирование** 17](#_Toc99364691)

[**Нелинейные стохастические модели** 20](#_Toc99364692)

[**Авторегрессионная модель условной неоднородности** 20](#_Toc99364693)

[**Модель стохастической волатильности** 21](#_Toc99364694)

[**Кластерный анализ** 23](#_Toc99364695)

# **Основные понятия**

Эконометрика подразделяется на: анализ временных рядов и кластерный анализ. Анализ временных рядов состоит из линейных стохастических (случайных) моделей и нелинейных стохастических моделей.

**Линейные стохастические модели:**

* Модель скользящего среднего;
* Авто регрессионная модель;
* Модель авторегрессии и скользящего среднего;
* Интегральная модель;
* Прогнозирование.

**Нелинейные стохастические модели:**

* Авто регрессионная модель условной неоднородности;
* Модели стохастической волатильности;
* Модели динамического хаоса, проблематика различимости хаотической и стохастической последовательности.

**Определение:**

*Среднее значение (математическое ожидание)* белого шума обозначается

**Определение:**

Последовательность называется *белым шумом, если*

**Свойства белого шума:**

1. Среднее значение (математическое ожидание) белого шума равно 0
2. Среднее значение квадрата белого шума конечно
3. Значения белого шума независимы;
4. Среднее значение произведения 2­-х различных значений равно произведению средних значений каждого из них

**Определение:**

*Белый гауссовский шум =* белый шум + условие гауссовости (нормальности).

**Определение:**

*Условие гауссовости (нормальности):* , где – отклонение от среднего значения (дисперсии).

**Определение:**

*Стандартная гауссовская (нормальная) случайная величина:*

**Определение:**

*Правило 3-х сигм –* из условия гауссовости следует, что практически все значениянормально распределенной случайной величины лежат в интервале

# **Модель скользящего среднего**

Moving average – , где – параметр зависимости от прошлого.

**Определение:**

– базисная последовательность, —последовательность основанная на базисной:

**Определение:**

*-алгебра –* содержит информацию, доступную к моменту времени

**Определение:**

*Оператор сдвига :*

**Свойства оператора сдвига:**

1. ;
2. ;
3. ;

**Определение:**

*Ковариация () –* статистическая мера взаимодействия двух переменных.

Пусть , тогда

*– отклонение от среднего значения, дисперсия*

*– степень зависимости, ковариация*

**Определение:**

Величины называются положительно (или отрицательно) коррелированы, если:

**Замечание:**

Поскольку и не зависят от , то последовательность является стационарной.

Если известно:

Если неизвестно:

**Определение:**

*Корреляция:*

**Замечание:**

– следует из неравенства Коши-Буняковского.

**Лабораторная работа № 2**

MA(1)

Построить 2 графика:

1. График компьютерной реализации последовательности (входные данные взять с Ширяев с. 150)
2. График прогнозируемых значений (Ширяев с. 183)

Проблема: никто не даст готовый временной ряд и нужно под какую-то модель подогнать данные.

Формат сдачи: .py + отчет с графиком (реальные значения и прогнозируемые) и входными данными.

# **Модель авторегрессии (порядка p)**

AR(p) – Auto Regressive ;

белый гауссовский шум

Задаются некоторые начальные данные:

**Частные случаи модели AR(p):**

1. Начальное значение:

Последовательность играет роль случайный величин, обновляющих информацию.

Начальные значения:

В компактной форме модель авторегрессии записывается как многочлен:   
*L – оператор сдвига:*

Нас интересует частный случай при

Начальные данные:

Выразим через :

В общем виде получится:

Рассмотрим 3 ситуации:

Числовые характеристики

1. Среднее значение (математическое ожидание)
2. Отклонение от среднего значения (дисперсия)
3. Величина зависимости значений временного ряда

Замечание: если —случайная величина, то используется .

Если , то

**Предельные значения числовых характеристик**

В отличии от модели скользящего среднего, у модели авторегрессии числовые характеристики зависят от , поэтому имеет смысл рассмотреть их значения при . Определяющую роль играет значение коэффициента .

Формула для предельного значения ковариации

**Лабораторная работа №3**

Модель авторегрессии 1 порядка.

Для начала стоит вспомнить , в частности то, как выводятся коэффициенты:

1. Построить график компьютерной реализации авторегрессионной последовательности 1-го порядка.

Эта функция будет считаться по-другому (см. Ширяев с. 184 Пр. 2)

**Утверждение 1:**

Справедливо следующее представление:

где *коэффициенты ряда Фурье*

*- спектральная плотность*

Запишем функцию

*– прогнозируемые коэффициенты*

*] - компьютерная реализация*

**Второе доказательство:**

Следует из понятия условного математического ожидания:

—вся информация доступная к моменту времени n

**Теорема**

# **Оценивание параметров модели с помощью метода максимального правдоподобия**

Известно по какому закону распределены величины, но неизвестны параметры распределения (

Функция правдоподобия

Как перейти от произведения к сумме?

Пример 1:

*Дана выборка из n нормальных случайных величин:*

Пример 2:

*По формуле Бернулли:*

*Продолжение 3 задания лабораторной № 3*

Из последнего:

Формулы для решения 3-го задания в лабораторной работе №3  
Заданные значения можно взять:  
Востановленные по временному ряду (лучше брать h > 100) :

# **Модель авторегрессии и скользящего среднего**

стр. 170

Модель ARMAчаще будем рассматривать

При

или

**Лабораторная работа №4**

1. Построить график компьютерной реализации (см. Ширяев стр. 173)

Модель – интегральная модель авторегрессии и скользящего среднего (I – Integrated). (см. Ширяева стр. 174)

*-- ARMA*

# **Прогнозирование**

Общий алгоритм прогнозирования для линейных моделей:

1. Представляем в виде:
2. Построить функция

**Примеры:**

1.

Рыночные значения:

Прогнозируемые значения:

1. **Третье доказательство:**

# **Нелинейные стохастические модели**

# **Авторегрессионная модель условной неоднородности**

– Autoregressive Conditional Heteroskedastic

Рассмотрим модель - авторегрессионная модель условной неоднородности с добавлением линейной регрессии.

Пусть

Запишем функцию правдоподобия для h:

Для

# **Модель стохастической волатильности**

См. Ширяев стр. 207

– Stochastic Volatility

Будем считать, что

**Прогноз для волатильности**

См стр 210

1. Т.к. и независимые

**Задание на 11 баллов (Модель стохастической волатильности)**

1. Построить график компьютерной реализации модели  
   Модель записывается в виде:  
   Нужно построить график
2. Построить график прогнозируемых значений для , а именно

# **Кластерный анализ**

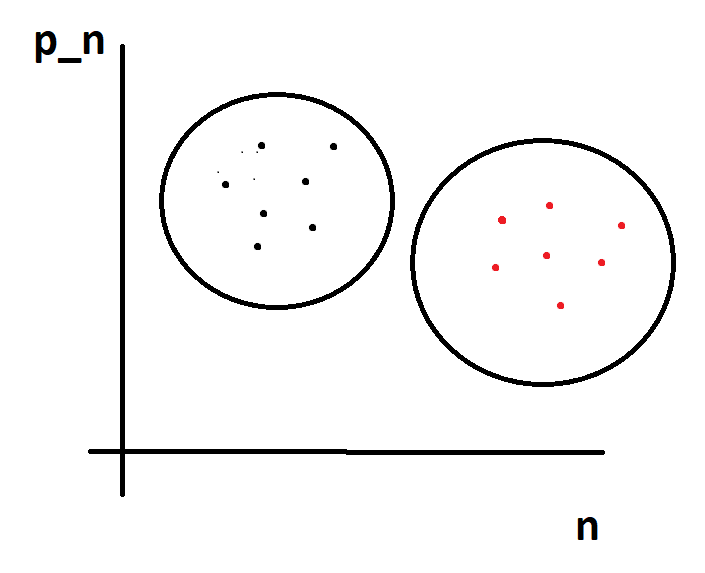
(возврат, return)

(доходность, profitability)

Кластерный анализ – это возможность разделить выборку на некоторые части, вызвано необходимостью решать разного рода задачи:

1. Что если   
   Алгоритм решения:  
   a) Разделим выборку из на 2 части, используя:  
    1) Метод k-средних (л. р. №7)  
    2) Метод максимального правдоподобия (л. р. № 8)  
   б) В каждом кластере выбрать соответствующий интервал (доп. л. р. на 14 баллов)

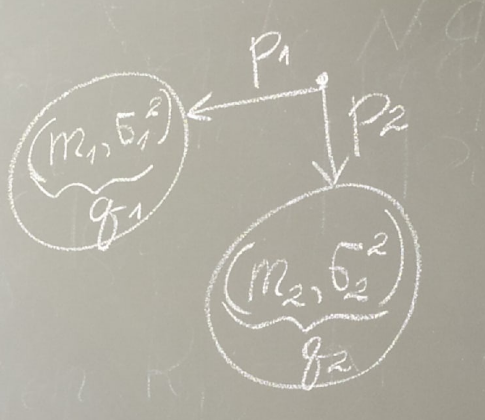
**Алгоритм k – средних:**, k – количество кластеров



**Метод максимального правдоподобия**

Используется предположение что элементы выборкиимеют нормальный закон распределения.

Предположим, что мы разбиваем выборку на 2 кластера:

Элементы каждой выборки нормально распределены:   


**Алгоритм**

**Начальные данные:**

Критерий остановки: когда мало отличаются.

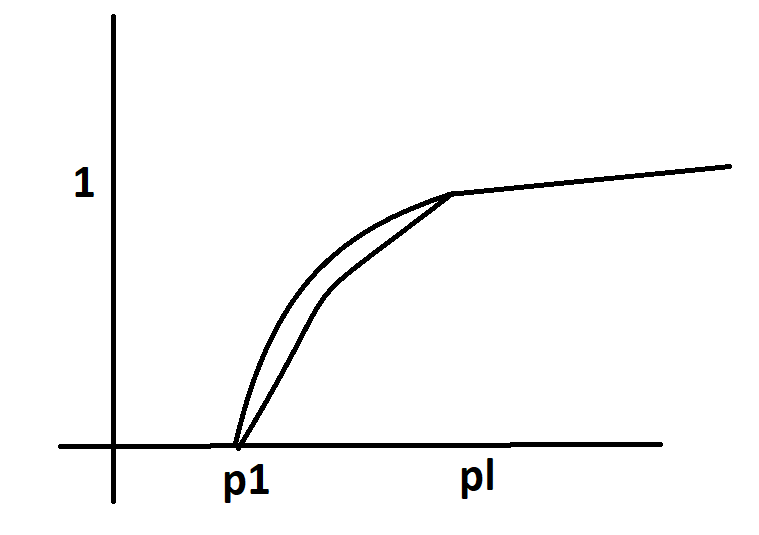
**Задание на 14 баллов**

1. Есть 2 кластера
2. Нужно в каждом кластере выделить интервал (непересекающиеся)

**Схема выделения интервала в одном кластере**

*с.в. – функция распределения*

Эмпирическая функция распределения



**Критерии интервала**

1. Длина должна быть как можно меньше
2. Веротность попасть в него должна быть как можно больше

Поэтому ставится следующая задачи:

*– доверительная веростность, близкая к 1*

Заменим одну задачу на две:

Рассматривается семейство -задач

Для каждого решить две задачи и найти интервал:

Из полученных интервалов нужно выбрать интервал минимальной длины

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

# **Многомерные случайные величины**

**Двумерные случайные величины**

1. и независимы следовательно матрица ковариации имеет диагональный вид  
   - вектор математического ожидания  
     
   Ковариационная матрица  
   – симметричная  
   **Свойства матрицы ковариации:**  
   1) 2) положительно определена